Jurnal Saintika (ISSN 1693-640X) Edisis Khusus Dies Natalis UIN Malang, Juni 2005.
Halaman 22-27

Edge-Magic Total Labeling pada Graph mP_2 (m bilangan asli ganjil)

Oleh
Abdussakir

Abstrak

Pelabelan total sisi ajaib (*edge magic total labeling*) pada suatu graph (V, E) dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan {1, 2, 3, …, $p + q$} sehingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta. Pada artikel ini akan dijelaskan bahwa graph mP_2 adalah total sisi ajaib, untuk m bilangan asli ganjil.

Kata kunci: graph, pelabelan, total sisi ajaib.

PENDAHULUAN

Graph G adalah pasangan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan p, dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan q.

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graph G, maka u dan v disebut *terhubung langsung*, v dan e serta u dan e disebut *terkait langsung*, dan u, v disebut *ujung* dari e. *Derajat dari titik v* di graph G, ditulis $\deg_G v$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Titik yang berderajat satu disebut *titik ujung*. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$.

Jalan u-v dalam graph G adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$$W: u=v_o, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n=v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G. v_0 disebut *titik awal*, v_n disebut *titik akhir*, $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ disebut *titik internal*, dan n menyatakan panjang dari W. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut *jalan tertutup*. Jika semua sisi di W berbeda, maka W disebut *trail*. Jika semua titik di W berbeda, maka W disebut *lintasan*. Graph berbentuk lintasan dengan titik sebanyak n dinamakan graph P_n.

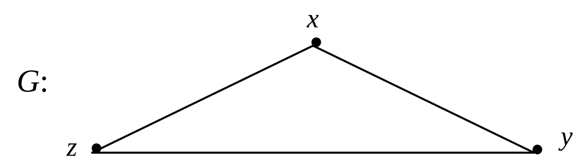
Misal G dan H graph. Maka graph $G \cup H$ adalah graph dengan $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. Jika G graph, maka $G \cup G$ ditulis $2G$ dan $G \cup G \cup \ldots \cup G$ (sebanyak n faktor) ditulis nG, untuk n bilangan asli.

Pelabelan total sisi ajaib (*edge magic total labeling*) pada suatu graph (V, E) dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke {1, 2, 3, …, $p + q$} sehingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta. Pelabelan total sisi ajaib dapat dimaknai bahwa jumlah label suatu sisi dan

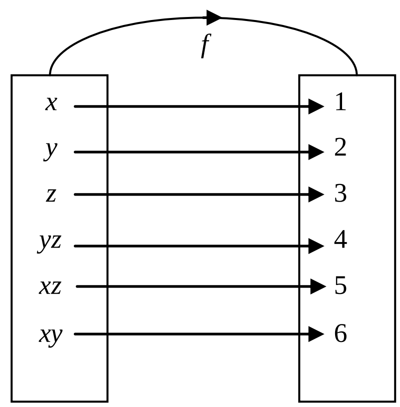
Abdussakir, M.Pd adalah Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.

label titik yang terkait langsung dengan sisi tersebut adalah sama, untuk semua sisi. Graph yang dapat dikenakan pelabelan total sisi ajaib disebut graph total sisi ajaib.

Sebagai contoh, perhatikan graph G berikut dengan $V(G) = \{x, y, z\}$ dan $E(G) = \{xy, yz, xz\}$. Jadi oder G adalah $p = 3$ dan ukuran G adalah $q = 3$. Akan ditunjukkan bahwa graph G adalah total sisi ajaib.



Jika dibuat fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sebagai berikut



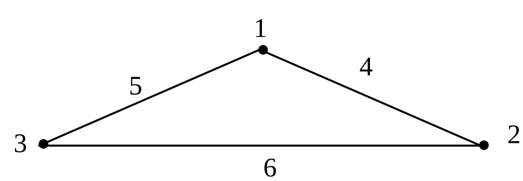
diperoleh

$f(x) + f(xy) + f(y) = 1 + 6 + 2 = 9$

$f(x) + f(xz) + f(z) = 1 + 5 + 3 = 9$

$f(y) + f(yz) + f(z) = 2 + 4 + 3 = 9$.

Jadi fungsi f adalah pelabelan total sisi ajaib pada G. Pelabelan pada graph G sehingga diperoleh pelabelan total sisi ajaib dapat digambar sebagai berikut



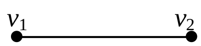
Pada artikel ini akan dijelaskan bahwa graph mP_2 adalah total sisi ajaib, untuk m bilangan asli ganjil. Untuk menunjukkan hal tersebut, perlu ditunjukkan adanya suatu fungsi bijekasi f dari $V(mP_2) \cup E(mP_2)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, |V(mP_2)| + |E(mP_2)|\}$ sehingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta.

PEMBAHASAN

Graph P_2 adalah graph lintasan dengan banyak order 2 dan ukuran 1. Pembahasan bahwa graph mP_2 adalah total sisi ajaib untuk m bilangan asli ganjil akan dilakukan secara khusus melalui beberapa contoh, dan selanjutnya disajikan dalam bentuk teorema beserta buktinya. Pemberian beberapa contoh khusus ini akan memberikan gambaran bagaimana pelabelan total sisi ajaib dapat dilakukan dan dapat digeneralisasi secara umum untuk graph mP_2, m bilangan asli ganjil.

Untuk m = 1

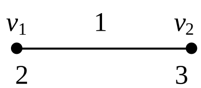
Graph P_2 dapat dilihat pada gambar berikut

P_2 :


Definisikan fungsi f dari $\{v_1, v_2, v_1v_2\}$ ke $\{1, 2, 3\}$dengan

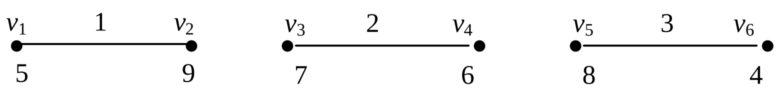
$f(v_1) = 2$
$f(v_2) = 3$
$f(v_1v_2) = 1$

maka diperoleh $f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_2) = 6$. Dengan demikian, fungsi f merupakan pelabelan total sisi ajaib pada P_2 dengan konstanta $k = 6$. Graph P_2 beserta labelnya nampak pada gambar berikut.

P_2 :


Untuk m = 3

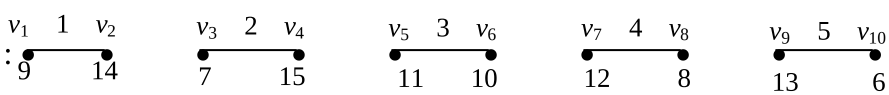
Pelabelan total sisi ajaib pada graph $3P_2$ dapat dilihat pada gambar berikut

$3P_2$:


dengan konstanta $k = 15$ untuk $3P_2$.

Untuk m = 5

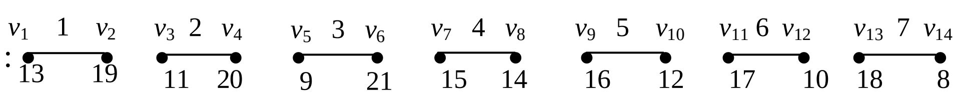
Pelabelan total sisi ajaib pada graph $5P_2$ dapat dilihat pada gambar berikut

$5P_2$:


dengan konstanta $k = 24$ untuk $5P_2$.

Untuk m = 7

Pelabelan total sisi ajaib pada graph $7P_2$ dapat dilihat pada gambar berikut

$7P_2$:


dengan konstanta $k = 33$ untuk $7P_2$.

Berdasarkan beberapa contoh tersebut, maka disajikan teorema berikut.

Teorema

Graph mP_2, dengan m bilangan asli ganjil, adalah total sisi ajaib.

Bukti:

Untuk $m = 1$, sudah jelas berdasarkan gambar bahwa P_2 adalah total sisi ajaib.
Untuk mP_2, m bilangan asli ganjil dan $m > 1$.
Graph mP_2 mempunyai order $2m$ dan ukuran m.
Misalkan $V(mP_2) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2m-1}, v_{2m}\}$dan
$E(mP_2) = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, \ldots, v_{2m-1}v_{2m}\}$
Jadi $|V(mP_2)| + |E(mP_2)| = 3m$.

Definisikan fungsi f dari $V(mP_2) \cup E(mP_2)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, 3m\}$dengan pengaitan sebagai berikut.

a. $f(v_iv_{i+1}) = \frac{i+1}{2}$, untuk $1 \le i \le 2m - 1$.
b. $f(v_i) = 2m - i$, untuk $1 \le i \le m - 1$ dan i ganjil.
c. $f(v_i) = 2m + i + \frac{m-i+1}{2}$, untuk $1 \le i \le m - 1$ dan i genap.
d. $f(v_i) = 2m + \frac{i-m+2}{2}$, untuk $m \le i \le 2m$ dan i ganjil.
e. $f(v_i) = 3m - i + 1$, untuk $m \le i \le 2m$ dan i genap.

Maka,

a. Untuk $1 \le i \le m - 1$ dan i ganjil, diperoleh

$$f(v_i) + f(v_iv_{i+1}) + f(v_{i+1}) = (2m - i) + \left(\frac{i+1}{2}\right) + \left[2m + (i+1) + \frac{m-(i+1)+1}{2}\right)$$
$$= 4m + 1 + \frac{m+1}{2}$$

b. Untuk $m \le i \le 2m$ dan i ganjil, diperoleh

$$f(v_i) + f(v_iv_{i+1}) + f(v_{i+1}) = \left(2m + \frac{i-m+2}{2}\right) + \left(\frac{i+1}{2}\right) + [3m - (i+1) + 1]$$
$$= 5m - i + \frac{i-m+2+i+1}{2}$$
$$= 4m + \frac{2m-2i+2i-m+3}{2}$$
$$= 4m + 1 + \frac{m+1}{2}.$$

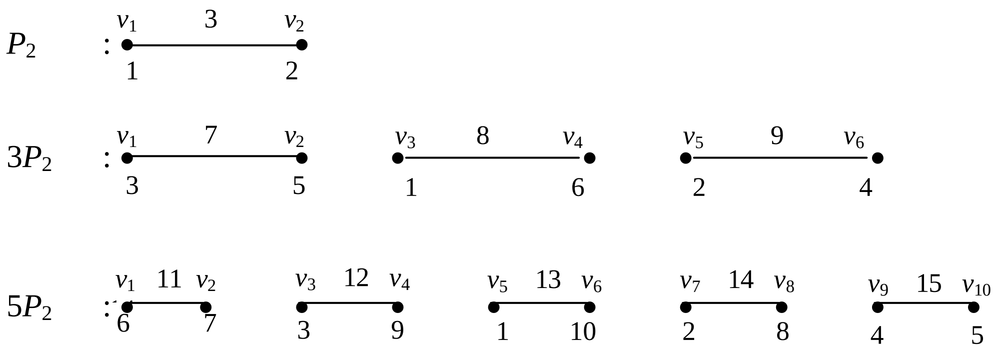
Dengan demikian, untuk mP_2, m bilangan asli ganjil adalah total sisi ajaib dengan konstanta $k = 4m + 1 + \frac{m+1}{2}$. ♦

Berdasarkan pembuktian teorema, maka diketahui bahwa konstanta k untuk graph mP_2, dengan pelabelan yang didefinisikan pada teorema, adalah

$$k = 4m + 1 + \frac{m+1}{2}.$$

Untuk $m = 1, 3, 5$, dan 7 konstanta k masing-masing adalah $k = 6, 15, 24$, dan 33.

Perlu diketahui bahwa pelabelan pada teorema, bukanlah satu-satu pelabelan total sisi ajaib pada graph mP_2. Berikut ini adalah contoh pelabelan lain untuk graph P_2, $3P_2$ dan $5P_2$.



Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph G sehingga $V(G)$ dipetakan ke himpunan $\{1, 2, \ldots, |V(G)|\}$ dengan pelabelan super sisi ajaib (*super edge-magic labeling*). Pada tiga contoh pelabelan di atas untuk P_2, $3P_2$, dan $5P_2$, terlihat bahwa masing-masing himpunan titik dipasangkan ke himpunan {1, 2, …., banyak titik}. Dengan demikian graph P_2, $3P_2$, dan $5P_2$ adalah super sisi ajaib.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan bahwa graph mP_2, dengan m bilangan asli ganjil, adalah total sisi ajaib dengan konstanta $k = 4m + 1 + \frac{m+1}{2}$.

Kepada pembaca disarankan untuk melakukan penelitian bahwa graph mP_2, dengan m bilangan asli ganjil, adalah super sisi ajaib. Selain itu penelitian dapat dilakukan mengenai pelabelan total sisi ajaib pada beberapa jenis graph yang lain.

Daftar Pustaka

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., 1976. *Graph Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition.* California: Wadsworth, Inc.